

deo13.gr

2^η Εργασία ΔΕΟ 13
2013-2014

Υποδειγματική λύση

Άσκηση 1

[Μέρος Α]

(Α)

$$TC=FC+VC=0.5Q^3 - 15Q^2 + 175Q + 300$$

$$TR=PQ=152.5Q - 3Q^2$$

$$\Pi=TR-TC=152.5Q - 3Q^2 - (0.5Q^3 - 15Q^2 + 175Q + 300) = -0.5Q^3 + 12Q^2 - 22.5Q - 300$$

(Β)

$$\frac{d\Pi}{dQ} = -1.5Q^2 + 24Q - 22.5 = -1.5(Q^2 - 16Q + 15) = -1.5(Q-1)(Q-15)$$

$$\text{Άρα } \frac{d\Pi}{dQ} = 0 \Leftrightarrow Q \in \{1, 15\} \quad , \quad \frac{d\Pi}{dQ} > 0 \Leftrightarrow Q \in (1, 15) \quad \text{και} \quad \frac{d\Pi}{dQ} < 0 \quad , \quad \text{αλλού.}$$

Άρα από τη μονοτονία της Π (κριτήριο 1^{ης} παραγώγου) προκύπτει ότι το κέρδος μεγιστοποιείται για $Q=15$ και ελαχιστοποιείται για $Q=1$.

(Γ)

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 1.5Q^2 - 30Q + 175$$

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 152.5 - 6Q$$

Για $Q=15$ είναι: $MC = 1.5(15)^2 - 30 \cdot 15 + 175 = 337.5 - 450 + 175 = 62.5$ και

$$MR = 152.5 - 6 \cdot 15 = 152.5 - 90 = 62.5$$

Παρατηρούμε ότι το κέρδος μεγιστοποιείται όταν $MR=MC$.

[Μέρος Β]

$$1) \varepsilon = -0.5 \Rightarrow -0.5 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{3.30-3}{3}} \Rightarrow -0.5 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{0.1} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = -0.05 \quad .$$

Άρα το πλήθος των αυτοκινήτων που διέρχεται ημερησίως από τα διόδια είναι:
 $2000 \cdot 0.95 = 1900$ και οι ημερήσιες εισπράξεις είναι: $1900 \cdot 3.3 = 6270 \text{ €}$.

$$2) \varepsilon = -1 \Rightarrow -1 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{3.30-3}{3}} \Rightarrow -1 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{0.1} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = -0.1 \quad .$$

Άρα το πλήθος των αυτοκινήτων που διέρχεται ημερησίως από τα διόδια είναι:
 $2000 \cdot 0.90 = 1800$ και οι ημερήσιες εισπράξεις είναι: $1800 \cdot 3.3 = 5940 \text{ €}$.

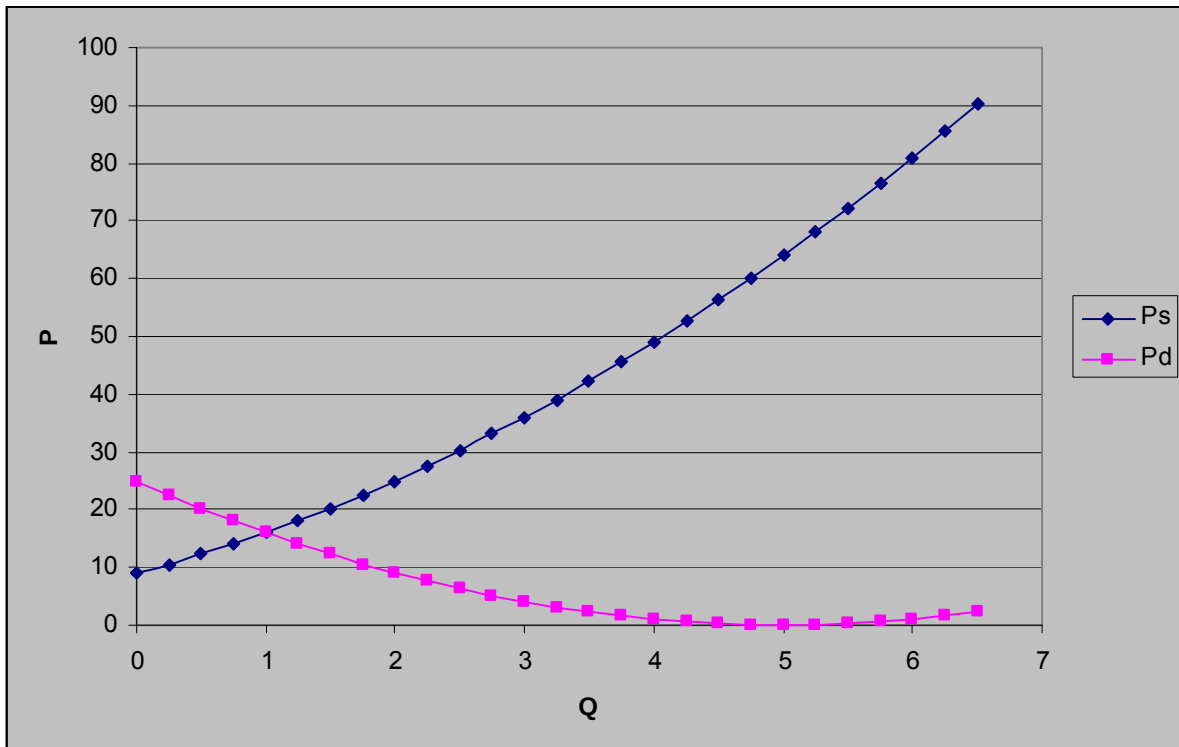
$$3) \varepsilon = -2 \Rightarrow -2 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{3.30-3}{3}} \Rightarrow -2 = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{0.1} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = -0.2 \quad .$$

Άρα το πλήθος των αυτοκινήτων που διέρχεται ημερησίως από τα διόδια είναι:
 $2000 \cdot 0.80 = 1600$ και οι ημερήσιες εισπράξεις είναι: $1600 \cdot 3.3 = 5280 \text{ €}$.

Άσκηση 2

(A)

Q	Ps	Pd
0	9	25
0,25	10,5625	22,5625
0,5	12,25	20,25
0,75	14,0625	18,0625
1	16	16
1,25	18,0625	14,0625
1,5	20,25	12,25
1,75	22,5625	10,5625
2	25	9
2,25	27,5625	7,5625
2,5	30,25	6,25
2,75	33,0625	5,0625
3	36	4
3,25	39,0625	3,0625
3,5	42,25	2,25
3,75	45,5625	1,5625
4	49	1
4,25	52,5625	0,5625
4,5	56,25	0,25
4,75	60,0625	0,0625
5	64	0
5,25	68,0625	0,0625
5,5	72,25	0,25
5,75	76,5625	0,5625
6	81	1
6,25	85,5625	1,5625
6,5	90,25	2,25



(B)

$$\text{Είναι: } P_s = Q^2 + 6Q + 9 = (Q + 3)^2$$

Άρα $P_s > 0$ για κάθε $Q \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ και επειδή P_s κυρτή παραβολή με κορυφή το σημείο $(-3, 0)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3, +\infty)$

$$\text{Είναι: } P_d = Q^2 - 10Q + 25 = (Q - 5)^2$$

Άρα $P_d > 0$ για κάθε $Q \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ και επειδή P_d κυρτή παραβολή με κορυφή το σημείο $(5, 0)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 5]$

Από συναλήθευση των παραπάνω διαστημάτων προκύπτει ότι το ζητούμενο πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $(3, 5)$

(Γ)

$$P_s = P_d \Leftrightarrow Q^2 + 6Q + 9 = Q^2 - 10Q + 25 \Leftrightarrow 16Q = 16 \Leftrightarrow Q = 1$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι το $(1, 16)$

(Δ)

Αύξηση της ποσότητας Q στο σημείο ισορροπίας κατά 10% σημαίνει: $Q = 1.1$, οπότε η τιμή P_d θα γίνει: $P_d = (1.1)^2 - 10 \cdot 1.1 + 25 = 15.21$, δηλαδή θα μειωθεί περίπου κατά 5%.

(E)

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν E_1 μεταξύ της P_d και του άξονα $x'x$, ανάμεσα στα σημεία

$$Q=0 \text{ και } Q=1 : E_1 = \int_0^1 (Q^2 - 10Q + 25)dQ = \left[\frac{Q^3}{3} - 5Q^2 + 25Q \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 5 + 25 = \frac{61}{3}.$$

Το εμβαδόν ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα AB και τον άξονα $x'x$ μεταξύ των σημείων $Q=0$ και $Q=1$ είναι: $E_2 = 16 \cdot 1 = 16$.

$$\text{Άρα το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι: } E_1 - E_2 = \frac{61}{3} - 16 = \frac{61}{3} - \frac{48}{3} = \frac{13}{3}.$$

Άσκηση 3

(A)

$$TC = \int MC(Q)dQ = \int (50 - 6Q + 3Q^2)dQ = 50Q - 3Q^2 + Q^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Αφού $FC=0$ θα είναι και $c=0$ άρα: $TC = 50Q - 3Q^2 + Q^3$

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{50Q - 3Q^2 + Q^3}{Q} = 50 - 3Q + Q^2$$

(B)

$$TR = \int MR(Q)dQ = \int (100 + 16Q - Q^2)dQ = 100Q + 8Q^2 - \frac{Q^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Επειδή η επιχείρηση δεν έχει άλλο έσοδο πέραν των εισπράξεων από τις πωλήσεις του προϊόντος της θα είναι $c=0$ άρα: $TR = 100Q + 8Q^2 - \frac{Q^3}{3}$.

$$TR = P \cdot Q \Rightarrow P = \frac{TR}{Q} = \frac{100Q + 8Q^2 - \frac{Q^3}{3}}{Q} = 100 + 8Q - \frac{Q^2}{3}$$

(Γ)

$$\Pi = TR - TC = 100Q + 8Q^2 - \frac{Q^3}{3} - (50Q - 3Q^2 + Q^3) = 50Q + 11Q^2 - \frac{4Q^3}{3}$$

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{d\left(50Q + 11Q^2 - \frac{4Q^3}{3}\right)}{dQ} = 50 + 22Q - 4Q^2 = -4\left(Q - \frac{11 + \sqrt{321}}{4}\right)\left(Q - \frac{11 - \sqrt{321}}{4}\right)$$

$$\text{Άρα } \frac{d\Pi}{dQ} = 0 \Leftrightarrow Q \in \left\{ \frac{11 + \sqrt{321}}{4}, \frac{11 - \sqrt{321}}{4} \right\}, \quad \frac{d\Pi}{dQ} > 0 \Leftrightarrow Q \in \left(\frac{11 - \sqrt{321}}{4}, \frac{11 + \sqrt{321}}{4} \right)$$

$$\text{και } \frac{d\Pi}{dQ} < 0, \text{ αλλού.}$$

Άρα από τη μονοτονία της Π (κριτήριο 1^{ης} παραγώγου) προκύπτει ότι το κέρδος

μεγιστοποιείται για $Q = \frac{11 + \sqrt{321}}{4}$.

Το μέγιστο κέρδος θα είναι:

$$\Pi\left(\frac{11 + \sqrt{321}}{4}\right) = 50\left(\frac{11 + \sqrt{321}}{4}\right) + 11\left(\frac{11 + \sqrt{321}}{4}\right)^2 - \frac{4\left(\frac{11 + \sqrt{321}}{4}\right)^3}{3} = 432.6$$

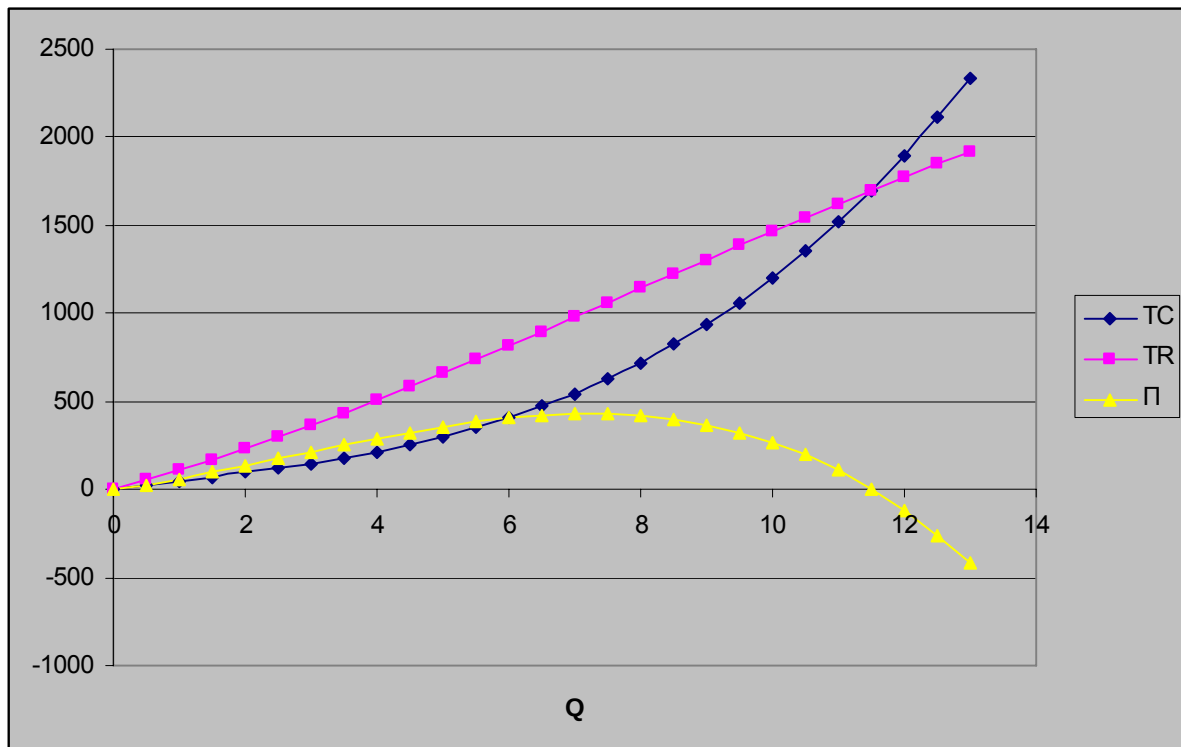
(Δ)

$$\Pi = 50Q + 11Q^2 - \frac{4Q^3}{3} = Q\left(50 + 11Q - \frac{4Q^2}{3}\right) = -\frac{4}{3}Q\left(Q - \frac{33 - 3\sqrt{\frac{1163}{3}}}{8}\right)\left(Q - \frac{33 + 3\sqrt{\frac{1163}{3}}}{8}\right)$$

Άρα το σύνολο των ποσοτήτων που δίνουν μη αρνητικό κέρδος Π είναι το διάστημα

$$\left[0, \frac{33 + 3\sqrt{\frac{1163}{3}}}{8}\right].$$

Q	TC	TR	Π
0	0	0	0
0,5	24,375	51,95833	27,58333
1	48	107,6667	59,66667
1,5	71,625	166,875	95,25
2	96	229,3333	133,3333
2,5	121,875	294,7917	172,9167
3	150	363	213
3,5	181,125	433,7083	252,5833
4	216	506,6667	290,6667
4,5	255,375	581,625	326,25
5	300	658,3333	358,3333
5,5	350,625	736,5417	385,9167
6	408	816	408
6,5	472,875	896,4583	423,5833
7	546	977,6667	431,6667
7,5	628,125	1059,375	431,25
8	720	1141,333	421,3333
8,5	822,375	1223,292	400,9167
9	936	1305	369
9,5	1061,625	1386,208	324,5833
10	1200	1466,667	266,6667
10,5	1351,875	1546,125	194,25
11	1518	1624,333	106,3333
11,5	1699,125	1701,042	1,916667
12	1896	1776	-120
12,5	2109,375	1848,958	-260,417
13	2340	1919,667	-420,333



Άσκηση 4

(A)

$$1) f'(x) = \left(e^{5x^2+7} \right)' = (5x^2+7)' e^{5x^2+7} = 10xe^{5x^2+7}$$

$$2) f'(x) = \left(2x^3(5x^2+7)^{-4} \right)' = (2x^3)'(5x^2+7)^{-4} + 2x^3 \left((5x^2+7)^{-4} \right)' = \\ 6x^2(5x^2+7)^{-4} + 2x^3 \left(-4(5x^2+7)^{-5}(5x^2+7)' \right) = 6x^2(5x^2+7)^{-4} + 2x^3 \left(-4(5x^2+7)^{-5}10x \right) = \\ 6x^2(5x^2+7)^{-4} - 80x^4(5x^2+7)^{-5}$$

$$3) f'(x) = \left(\ln(5x^2+7) \right)' = \frac{1}{5x^2+7} (5x^2+7)' = \frac{10x}{5x^2+7}$$

$$4) f'(x) = \left(\frac{(x^3+4)^5}{(1-2x^2)^3} \right)' = \frac{\left((x^3+4)^5 \right)' (1-2x^2)^3 - (x^3+4)^5 \left((1-2x^2)^3 \right)'}{(1-2x^2)^6} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{5(x^3+4)^4 (x^3+4)' (1-2x^2)^3 - (x^3+4)^5 3(1-2x^2)^2 (1-2x^2)'}{(1-2x^2)^6} = \\
& \frac{5(x^3+4)^4 3x^2 (1-2x^2)^3 - (x^3+4)^5 3(1-2x^2)^2 (-4x)}{(1-2x^2)^6} = \\
& \frac{15x^2(x^3+4)^4 (1-2x^2)^3 + 12x(x^3+4)^5 (1-2x^2)^2}{(1-2x^2)^6} = \\
& \frac{3x(x^3+4)^4 (1-2x^2)^2 (5x(1-2x^2) + 4(x^3+4))}{(1-2x^2)^6} = \\
& \frac{3x(x^3+4)^4 (5x(1-2x^2) + 4(x^3+4))}{(1-2x^2)^4} = \\
& \frac{3x(x^3+4)^4 (-6x^3 + 5x + 16)}{(1-2x^2)^4}
\end{aligned}$$

(B)

$$5) F(x) = \int (5x-2)^{10} dx.$$

$$\text{Θέτουμε: } u = 5x-2 \Rightarrow dx = \frac{du}{5}.$$

$$\text{Άρα το αόριστο ολοκλήρωμα γίνεται: } \frac{1}{5} \int u^{10} du = \frac{1}{5} \frac{u^{11}}{11} = \frac{u^{11}}{55}.$$

$$\text{Οπότε: } F(x) = \frac{(5x-2)^{11}}{55} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$6) F(x) = \int \frac{1}{5x-2} dx.$$

$$\text{Θέτουμε: } u = 5x-2 \Rightarrow dx = \frac{du}{5}.$$

$$\text{Άρα το αόριστο ολοκλήρωμα γίνεται: } \frac{1}{5} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{5} \ln u.$$

$$\text{Οπότε: } F(x) = \frac{1}{5} \ln(5x-2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$7) F(x) = \int e^{5x-2} dx.$$

$$\text{Θέτουμε: } u = 5x-2 \Rightarrow dx = \frac{du}{5}.$$

$$\text{Άρα το αόριστο ολοκλήρωμα γίνεται: } \frac{1}{5} \int e^u du = \frac{1}{5} e^u.$$

$$\text{Οπότε: } F(x) = \frac{1}{5} e^{5x-2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(Γ)

8)

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx &= \int (x^2 - 2x + 5)(-e^{-x})' dx = (-x^2 + 2x - 5)e^{-x} - \int (x^2 - 2x + 5)'(-e^{-x}) dx = \\
 &= (-x^2 + 2x - 5)e^{-x} + \int (2x - 2)e^{-x} dx = (-x^2 + 2x - 5)e^{-x} + \int (2x - 2)(-e^{-x})' dx = \\
 &= (-x^2 + 2x - 5)e^{-x} + (2x - 2)(-e^{-x}) - \int (2x - 2)'(-e^{-x}) dx = \\
 &= (-x^2 + 2x - 5)e^{-x} + (-2x + 2)e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = \\
 &= -(x^2 + 3)e^{-x} - 2e^{-x} + c = -(x^2 + 5)e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \int x \ln x dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

(Δ)

$$\begin{aligned}
 10) \int_0^4 \sqrt{x}(x-2) dx &= \int_0^4 x^{1/2}(x-2) dx = \int_0^4 (x^{3/2} - 2x^{1/2}) dx = \left[\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} \right]_0^4 = \\
 &= \frac{2 \cdot 4^{5/2}}{5} - \frac{4 \cdot 4^{3/2}}{3} = \frac{2^6}{5} - \frac{2^5}{3} = \frac{2^5(3 \cdot 2 - 5)}{15} = \frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \int_{-20}^{-1} \left(\frac{3}{e^{-x}} - \frac{1}{3x} \right) dx &= 3 \int_{-20}^{-1} e^x dx - \frac{1}{3} \int_{-20}^{-1} \frac{1}{x} dx = 3[e^x]_{-20}^{-1} - \frac{1}{3} [\ln|x|]_{-20}^{-1} = \\
 &= 3 \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^{20}} \right) - \frac{1}{3} (\ln 1 - \ln 20) = 3 \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^{20}} \right) + \frac{\ln 20}{3}
 \end{aligned}$$

(Ε)

Η $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Θα κατασκευάσουμε τον πίνακα μεταβολών της f .

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι: } f'(x) &= (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 4(x^3 - 1) + 6x(x - 1) = \\
 &= 4(x - 1)(x^2 + x + 1) + 6x(x - 1) = (x - 1)(4x^2 + 4x + 4 + 6x) = (x - 1)(4x^2 + 10x + 4)
 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο δευτέρου βαθμού: $4x^2 + 10x + 4$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 100 - 64 = 36 \text{ και ρίζες: } x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 4} = \frac{-10 \pm 6}{8} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα: } f'(x) = 4(x-1)(x+2) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

x	$-\infty$	-2		-1/2		1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	$\nwarrow$ T.E. $f(-2)=0$ $\nearrow$ T.M. $f(-1/2)=81/16$ $\swarrow$ T.E. $f(1)=0$ $\nearrow$						

Άρα η f παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα: για $x=-2$ το $f(-2)=0$ και για $x=1$ το $f(1)=0$ και ένα τοπικό μέγιστο: για $x=-1/2$ το $f(-1/2)=81/16$.